MEXANİKA

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Г.М.ГАСЫМОВ
Бакинский Государственный Университет, ИММ НАНА
husameddinqasimov@gmail.com

В работе исследуется задача устойчивости ортотропной прямоугольной пластины переменной толщины сжатой в одном направлении, с учетом внешнего упругого сопротивления. Построено уравнение устойчивости для двухмерного случая. Качественный и количественный анализ был проведен для цилиндрической формы потери устойчивости в случае, когда толщина вдоль длины меняется по линейному закону.

Ключевые слова: пластинка, деформация, устойчивость.

В последние годы прямоугольные пластинки, изготовленные из ортотропного материала являются наиболее распространенными элементами конструкции.

В данной работе исследуется задача устойчивости ортотропной прямоугольной пластинки толщиной $h = h_0 f(x)$, сжатой вдоль длинной стороны равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью P. Функция $f(x)$ со своими производными до второго порядка являются непрерывными функциями [1]. Координатная система выбрана следующим образом: оси X и Y находятся на срединной плоскости, а ось Z перпендикулярна к ним.

$$h_0 = \frac{\overline{h} + \underline{h}}{\overline{h} - \underline{h}},$$

здесь $\overline{h}$ и $\underline{h}$ -наибольшее и наименьшее значения толщины пластинки, соответственно.

Связь между напряжениями σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} и деформациями ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} имеет следующий вид [2,3]:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}\right), \quad \sigma_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}\right), \quad \sigma_{12} = G\varepsilon_{12}. \quad (1)$$

E_1, E_2- модули упругости, ν_1, ν_2- коэффициенты Пуассона, G- модуль сдвига.

$$\varepsilon_{11} = e_1 + \chi_1 z, \quad \varepsilon_{22} = e_2 + \chi_2 z, \quad \varepsilon_{12} = e_0 + \chi_0 z. \qquad (2)$$

Здесь e_1, e_2, e_0 -деформации срединной поверхности, χ_1, χ_2 -кривизны, χ_0-кручение срединной поверхности.

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \qquad (3)$$

где w-прогиб.

Учитывая (1), (2) и (3) в соотношениях $T_{ij} = \int\limits_{-h_0 f(x)}^{h_0 f(x)} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int\limits_{-h_0 f(x)}^{h_0 f(x)} \sigma_{ij} z dz$

получим:

$$T_{11} = \frac{2E_1 h_0}{1-\nu_1\nu_2}\left(e_1 + \nu_2 e_2\right) f(x), \quad T_{22} = \frac{2E_2 h_0}{1-\nu_1\nu_2}\left(e_2 + \nu_1 e_1\right) f(x),$$

$$T_{12} = 2Gh_0 e_0 f(x). \qquad (4)$$

$$M_{11} = \frac{2E_1 h_0^3}{3(1-\nu_1\nu_2)}\left(\chi_1 + \nu_2\chi_2\right) f^3(x), \quad M_{22} = \frac{2E_2 h_0^3}{3(1-\nu_1\nu_2)}\left(\chi_2 + \nu_1\chi_1\right) f^3(x),$$

$$M_{12} = \frac{2}{3} h_0^3 G \chi_0 f^3(x). \qquad (5)$$

Пользуясь выражениями для моментов и кривизн, получаем следующее уравнение устойчивости:

$$A_1 f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_2 f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_3 f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} +$$

$$+3f(x)\left[2\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 + f(x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]\left(A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 6A_1 f^2(x)\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \qquad (6)$$

$$+A_5 f^2(x)\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}T_{11} - 2T_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Воспользуемся далее уравнением совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \qquad (7)$$

Выразим усилия T_{11}, T_{22}, T_{12} через функцию усилий ϕ следующим образом:

$$T_{11}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\quad T_{22}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad T_{12}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.$$

Из (4) найдем e_1, e_2, e_0 и подставим в (7). После некоторых преобразований уравнение совместности деформаций примет вид:

$$\frac{B_1}{f(x)}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{B_2}{f(x)}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{B_3}{f(x)}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+$$
$$+\frac{1}{f^2(x)}\left[\frac{2}{f(x)}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2-\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]\left(B_1\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-B_4\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)-\frac{2B_1}{f^2(x)}\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+$$
$$+\frac{B_5}{f^2(x)}\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Здесь введены обозначения:

$$A_1=\frac{E_1h_0^3}{12(1-\nu_1\nu_2)};\quad A_2=\frac{h_0^3\left[E_1\nu_2+G(1-\nu_1\nu_2)\right]}{6(1-\nu_1\nu_2)};\quad A_3=\frac{E_2h_0^3}{12(1-\nu_1\nu_2)};$$
$$A_4=\frac{E_1\nu_2h_0^3}{12(1-\nu_1\nu_2)};\quad A_5=\frac{h_0^3\left[E_1\nu_2+G(1-\nu_1\nu_2)\right]}{2(1-\nu_1\nu_2)}.$$
$$B_1=\frac{1}{2E_2h_0},\ B_2=\frac{E_1-2G\nu_1}{2E_1Gh_0},\ B_3=\frac{1}{2E_1h_0},\ B_4=\frac{\nu_1}{2E_1h_0},\ B_5=-B_2.$$

В данном случае уравнение устойчивости (6) примет следующий вид ($\delta T_{ij}=0$):

$$A_1f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_2f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+A_3f^3(x)\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+$$
$$+3f(x)\left[2\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2+f(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]\left(A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+6A_1f^2(x)\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+ \tag{8}$$
$$+A_5f^2(x)\frac{df(x)}{dx}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+k\left[1+\varepsilon_1\psi(x,y)\right]w+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$$

Здесь k -коэффициент Винклера, $\psi(x,y)$-непрерывная функция, $\varepsilon_1\in[0,1]$.

Решение (8) будем искать в следующем виде:

$$w(x,y)=C\sin\alpha x\sin\beta y, \tag{9}$$

где

$$\alpha=\frac{m\pi}{a},\ \beta=\frac{n\pi}{b}.$$

Подставляя (9) в (8) и используя метод Бубнова-Галеркина, при

$$f(x)=1+\varepsilon\bar{x},\quad \psi(x,y)=\bar{x}\cdot\bar{y},\quad \left(\bar{x}=xa^{-1},\ \bar{y}=yb^{-1},\ \varepsilon\in[0,1]\right)$$

получаем:

$$P=\frac{1}{2}\left(A_1\alpha^2+A_2\beta^2+A_3\frac{\beta^4}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon^2+\frac{1}{4}\varepsilon^3\right)-3\varepsilon^2\left(A_1+A_4\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\right)+\frac{1}{2}k\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right).$$

В случае цилиндрической формы изгибной потери устойчивости уравнение (8) примет вид:

$$A_1 f^3(x)\frac{d^4w}{dx^4}+3A_1 f(x)\left[2\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2+f(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]\frac{d^2w}{dx^2}+6A_1 f^2(x)\frac{df(x)}{dx}\frac{d^3w}{dx^3}+ \qquad (10)$$

$$+k[1+\varepsilon_1\varphi(x)]w+P\frac{d^2w}{dx^2}=0.$$

Для прогиба $w(x)$ примем выражение вида:

$$w(x)=C\sin\alpha x. \qquad (11)$$

В этом случае, при

$$f(x)=1+\varepsilon\bar{x},\quad \psi(x)=\bar{x}$$

получаем:

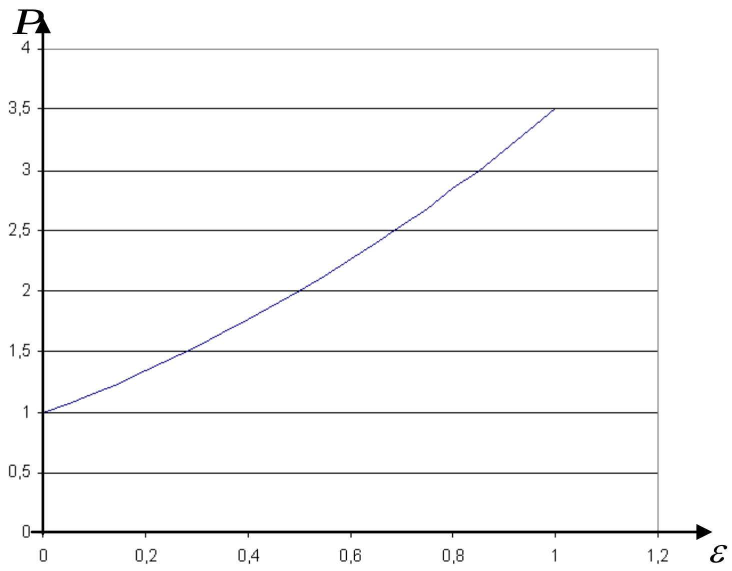
$$P=A_1\alpha^2\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon^2+\frac{1}{4}\varepsilon^3\right)-6A_1\varepsilon^2\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\right)+k\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right)\approx A_1\alpha^2\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon^2\right)+$$

$$+k\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right),$$

или

$$\bar{P}=\frac{P}{A_1\alpha^2}=1+\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon^2+\frac{k}{A_1\alpha^2}\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_1\right).$$

В случае $k=0$, проведен численный анализ и результаты показаны в виде графика зависимости между характерными параметрами.



Как видно из графика, учет переменности толщины существенным образом влияет на значение критической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985, 303 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 415с.

DƏYİŞƏN QALINLIQLI ORTOTROP DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN DAYANIQLIĞI HAQQINDA

H.M.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə ətraf mühitin elastik müqavimәti nəzərə alınmaqla, bir istiqamətdə sıxılmış dəyişən qalınlıqlı ortotrop düzbucaqlı lövhənin dayanıqlığı məsələsinə baxılır. Ümumi hal üçün deformasiyanın birgəlik şərti və tarazlıq tənliyi çıxarılmışdır. Dayanıqlığın itməsinin silindrik forması üçün və qalınlığın uzunluq boyunca xətti qanunla dəyişməsi halı üçün analiz aparılmışdır.

Açar sözlər: lövhə, deformasiya, dayanıqlıq.

ON STABILITY OF AN ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATE OF VARIABLE THICKNESS

H.M.GASIMOV

SUMMARY

The paper studies a problem on stability of orthotropic rectangular plate of variable thickness compressed in one direction. Elastic resistance is taken into account. Equilibrium equation and strain compatibility condition are derived for a general case. Detailed analysis is carried out for cylindric form of stability loss when the thickness along the length changes by the linear law.

Key words: plate, deformation, stability.

Поступило в редакцию: 25.02.2014 г.
Подписано к печати: 04.04.2014 г.